O METODA HOMOTOPICA PERTURBATOARE MODIFICATA

1.INTRODUCERE

Probleme neliniare sunt mai dificil de rezolvat decât cele liniare. tehnici neliniare analitice "pentru rezolvarea unor probleme non-lineare au fost dominate de metode perturbații, care au găsit aplicații largi în inginerie. Dar, ca şi alte tehnici de non-linear analitice, metodele de perturbație au propriile limitări. Toate metodele perturbatiilor sunt bazate pe parametri mici, astfel încât soluțiile aproximative pot fi exprimate într-o serie de parametri mici. Această presupunere aşa-numita parametru mici limitează foarte mult de aplicare a tehnicilor de perturbare, cum este bine cunoscut o majoritate covârşitoare de probleme neliniare nu au parametrii mici la toate. Deci, este foarte necesar pentru a dezvolta un fel de nouă metodă de analiză neliniară, care nu necesită parametrii mici la toate.

Există unele abordări analitice alternative, cum ar fi metoda balanței armonice, metoda Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky şi metoda de liniarizare ponderat, care uneori poate da chiar şi aproximări analitice pentru parametrii mari. Pentru a extinde gama de valabilitate a acestor metode de perturbare a sistemelor de puternic neliniare a fost dorința de cercetători pentru o lungă perioadă de timp. Burton a prezentat o metodă de transformare timp de analiză a sistemelor de puternic neliniare. Această metodă permite perioada exactă care urmează să fie calculată la orice grad de precizie dorit. El a definit un nou parametru a =a(ε,a), unde a este amplitudinea inițială de vibrații în aşa fel încât soluțiile asimptotică în serie de puteri a unui converg mai rapid decât expansiuni standard perturbație în serie de puteri de e. Cheung et toate a prezentat o nouă metodă modificată Lindstedt-Poincare,

astfel că un parametru a = a (ε, ω_0, ω_1) este definit, care permite un sistem puternic neliniare să fie transformată într-un sistem de parametru mic cu privire la a.
În această lucrare ne vom aplica tehnica homotopy într-un mod complet diferit, scopul nostru este de a prezenta modificat Homotopy perturbarea Metoda (MHPM) pentru rezolvarea problemelor neliniare. Soluția periodică obținute prin această metodă este valabilă nu numai pentru parametrii mici

parametri, dar, de asemenea, pentru parametrii foarte mari. Această metodă, uneori, duce la rezultate în conformitate cu metoda Lindstedt-Poincare sau metoda balanței armonice

2.IDEI DE BAZA PENTRU MHPM

Să ne considerăm în continuare amortizate, oscilațiile forțată a unui sistem neliniar neconservative reglementate de ecuația

$$\ddot{v}(t) + \omega^2 v(t) = F(\Omega t, v, \dot{v}, \ddot{v}),\ v(0) = A,\ \dot{v}(0) = 0 \qquad (1)$$

unde u (t) este o variabilă adimensional, $\dot{v} = \frac{du}{dt}$, F este o funcție analitică neliniar cu perioada T în prima variabilă.
Ne construim o familie de un parametru de ecuații

$$\frac{\partial^2 \cup(t,p)}{\partial t^2} + \Lambda(p) \cup (t,p) = pF\left(\Omega t, \cup (t,p), \frac{\partial \cup(t,p)}{\partial t}, \frac{\partial^2 \cup(t,p)}{\partial t^2}\right),$$

(2)

$$t \in [0,\infty),\ \cup (0,p) = A, \frac{\partial \cup(0,p)}{\partial t} = 0$$

în cazul în care PE [0,1] este un parametru de incluziune şi U (t, p) este o funcție analitică atât de t şi p. La p = 0. avem, evident, U (t, 0) = UO (t) (apropiere inițială a EQ (I). La p = I, ecuatia (2) este. Exact la

fel ca ec. (L), respectiv, astfel încât U (t, l) u = (t) şi u (t) este exact solutia pe care dorim să ştim . Ca p parametrul încorporarea variază de la zero la unu, U (t, p) variază continuu de la u_0 (t) la U(t) şi □(p) variază de la □(p) la □(l)= ω_0^2. Acest tip de variații continue se numeşte deformare în topologie.
Să presupunem că U (t, p) şi □ (p) au derivate cu privire la încorporarea p variabile evaluate la p = 0:

$$\frac{\partial^j \cup(t,p)}{\partial p^j}\Big|_{p=0} = v_0^{[j]}(t), \frac{\partial^j \Lambda(p)}{\partial p^j}\Big|_{p=0} = \Lambda_0^{[j]}, j \geq 1 \qquad (3)$$

$$\cup(t,p) = v_0(t) + \sum_{j\geq 1} \frac{v_0^{[j]}(t)}{j!} p^j \; ; \; \Lambda(p) = \Lambda(0) + \sum_{j\geq 1} \frac{\Lambda_0^{[j]}}{j!} p^j \qquad (4)$$

$$v(t) = v_0(t) + \sum_{j\geq 1} \frac{v_0^{[j]}(t)}{j!}, \omega_0^2 = \Lambda(0) + \sum_{j\geq 1} \frac{\Lambda_0^{[j]}}{j!} \qquad (5)$$

cu condiția ca de razele de convergență a seriei (4) nu sunt mai puțin de 1. Acum, cheia problemei devine modul de a rezolva aceste instrumente derivate de j-lea. Setarea p = 0, vom obține

$$\ddot{v}_0(t) + \Lambda(0) v_0(t) = 0 \, , \; \Lambda(0) = \omega^2 \, , \; v_0(0) = A, \; \dot{v}_0(0) = 0 \qquad (6)$$

în cazul în care co parametru este încă să fie stabilită. De diferențiere ec. (2) cu privire la p şi p setarea = 0, avem

$$\ddot{v}_0^{[1]}(t) + \omega^2 v_0^{[1]}(t) = F\left(\Omega t, v_0(t), \dot{v}_0(t), \ddot{v}_0(t)\right) - \Lambda_0^{[1]} v_0(t); \; v_0^{[1]}(0) = \dot{v}_0^{[1]}(0) = 0 \qquad (7)$$

în cazul în care u_0 (t) este dată de ecuația (6) şi. evitarea termen secular este obținut $\Lambda_0^{[1]}$. În acelaşi mod, putem obține toate ecuațiile de j-lea, pentru care reglementează $u_o^{[j]} (j \geq 2$ (j> 2). Pentru j = 2 se obține de ordinul doi
ecuație:

$$\ddot{v}_0^{[2]}(t) + \omega^2 v_0^{[2]}(t) = 2F^{[1]}(\Omega t, v_0(t), \dot{v}_0(t), \ddot{v}_0(t)) - 2\Lambda_0^{[1]} v_0^{[1]}(t) - \Lambda_0^{[2]} v_0(t); \quad (8)$$

$$v_0^{[2]}(0) = \dot{v}_0^{[2]}(0) = 0$$

unde

$$F^{[1]}(\Omega t, v_0, \dot{v}_0, \ddot{v}_0) = \frac{dF(\Omega t, v, \dot{v}, \ddot{v})}{dp}\Big|_{p=0} = \frac{\partial F}{\partial v}\Big|_{p=0} v_0^{[1]}(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot{v}}\Big|_{p=0} \dot{v}_0^{[1]} +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial \ddot{v}}\Big|_{p=0} \ddot{v}_0^{[1]} \quad (9)$$

Fiecare ecuație j-lea-comandă este liniară, prin urmare, (51) problema original neliniare reglementate de "ecuația (11) poate fi transformat la un număr infinit de subprobleme liniare.

3.Aplicatie

Vom ilustra procedura de evaluare de bază a metodei propuse recent de următorul exemplu. Considerăm o ecuație diferențială :

$$\ddot{v} + \frac{v}{1+\varepsilon v^2} = 0\,,\ \varepsilon \in (0,\infty) \quad (10)$$

$$v(0) = A \ \ and\ \dot{v}(0) = 0$$

Rescriem (10) in forma $(F(\Omega t, v_0, \dot{v}_0, \ddot{v}_0) = -\varepsilon v^2 \ddot{v})$

$$\ddot{v} + v = -\varepsilon v^2 \ddot{v} \quad (11)$$

Din formula (6) avem

$$v_0(t) = A \cos \omega t \qquad (12)$$

Inlocuim (12) in (7), rezulta:

$$\ddot{v}_0^{[1]} + \omega^2 v_0^{[1]} = \varepsilon \omega^2 A^3 \cos^3 \omega t - \Lambda_0^{[1]} A \cos \omega t \qquad (13)$$

Cu notatiile

$$v_0^{[j]} = \varepsilon^j v_0^{(j)}, \Lambda_0^{[j]} = \varepsilon^j \Lambda_0^{(j)}, \; j \geq 1 \qquad (14)$$

Ec. (5) si (13) sunt:

$$v(t) = v_0(t) + \sum_{j \geq 1} \frac{\varepsilon^2 v_0^{(j)}(t)}{j!}; \quad \omega_0^2 = \omega^2 + \sum_{j \geq 1} \frac{\varepsilon^j \Lambda_0^{(j)}}{j!} \qquad (15)$$

$$v_0^{(1)} + \omega^2 v_0^{(1)} = A \cos \omega t \left(\frac{3\omega^2}{4} A^2 - \Lambda_0^{(1)} \right) + \frac{\omega^2 A^3}{4} \cos 3\omega t \qquad (16)$$

Evitarea prezenței unui termen seculare în ecuația (16), are nevoie de:

$$\Lambda_0^{(1)} = \frac{3\omega^2}{4} A^2 \qquad (17)$$

Având în vedere condițiile inițiale $u_u^{(1)}$= 0 şi $\dot{u}_0^{(1)}$ (0) = 0, se obține soluția de EQ, (16), care prevede:

$$v_0^{(1)}(t) = \frac{A^3}{32} (\cos \omega t - \cos 3\omega t) \qquad (18)$$

Înlocuind (12), (17), (18) şi (14) în (8) produce:

$$\ddot{v}_0^{(2)} + \omega^2 v_0^{(2)} = A\cos\omega t\left(\frac{3}{128}\omega^2 A^4 - \Lambda_0^{(2)}\right) - \frac{13}{128}A^4\omega^2\cos^3\omega t - \frac{11}{128}A^4\omega^2\cos 5\omega t \quad (19)$$

Eliminarea termenului seculare necesită:

$$\Lambda_0^{[2]} = \frac{3}{128}\omega^2 A^4 \quad (20)$$

Rezolvarea eq (19) cu condițiile inițiale$v_0^{(2)} = 0\ and\ \dot{v}_0^{(2)}(0) = 0$

vom obține:

$$v_0^{(2)}(t) = \frac{13A^4}{1024}(\cos 3\omega t - \cos\omega t) + \frac{11A^4}{3072}(\cos 5\omega t - \cos\omega t) \quad (21)$$

Înlocuind $\Lambda_0^{(1)}$ and $\Lambda_0^{(2)}$ into $(15), (\omega_0 = 1)$

avem:

$$1 = \omega^2 + \frac{3}{4}\varepsilon\omega^2 A^2 + \frac{3}{256}\varepsilon^2\omega^2 A^4 + 0(\varepsilon^3) \quad (22)$$

Din ecuatia (22) obtinem:

$$\omega^2 = \frac{1}{1+\frac{3}{4}\varepsilon A^2 + \frac{3}{256}\varepsilon^2 A^4} \quad (23)$$

Perioada aproximativa obtinuta din ec. (23) este

$$T_{approx} = 2\pi\left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon A^2 + \frac{3}{256}\varepsilon^2 A^4\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (24)$$

Formula (24) funcționează bine pentru e $\varepsilon\,(0 < \varepsilon \ll 1)$ dar se degradează rapid atunci când ε devine mare. Aici, dorim să dezvolte expansion uniform valabil pentru ω^2şi u (t) pentru valorile mari ale lui, folosind un nou definit RI parametru de expansiune $\eta(\varepsilon, A)$ după cum urmează:

$$\eta(\varepsilon, A) = \frac{\frac{3}{4}\varepsilon A^2}{1+\frac{3}{4}\varepsilon A^2} \tag{25}$$

Această relație este rapid convergente, indiferent de magnitudinea de εA^2, deoarece $\eta < 1 \; for \; all \; \varepsilon A^2$. În ceea ce priveşte ti s parametru original este dat de

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\frac{3}{4}A^2(1-\eta)} \tag{26}$$

Ecuatia (11) poate fi scrisa ca

$$\ddot{v} + v = \eta\left(\ddot{v} + v - \frac{4v^2\ddot{v}}{3A^2}\right) \tag{27}$$

Ecuatia (6),(7) si (8) sunt:

$$\ddot{v}_0 + \omega^2 v_0 = 0\,, \; v_0(0) = A, \; \dot{v}_0(0) = 0 \tag{28}$$

$$\ddot{v}_0^{(1)} + \omega^2 v_0^{(1)} = -\Lambda_0^{(1)} v_0 + \ddot{v}_0 + v_0 - \frac{4v_0^2\,\ddot{v}}{3A^2} \tag{29}$$

$$\ddot{v}_0^{(2)} + \omega^2 v_0^{(2)} = -\Lambda_0^{(2)} v_0 - 2\Lambda_0^{(1)} v_0^{(1)} + 2\ddot{v}_0^{(1)} + 2v_0^{(1)} - \frac{8(v_0^2\ddot{v}_0^{(1)} + 2v_0\ddot{v}_0 v_0^{(1)})}{3A^2} \tag{30}$$

Ecuatia (28) are Solutia:

$$v_0(t) = A\cos\omega t \tag{31}$$

Inlocuind (31) in (29) avem

$$\ddot{v}_0^{(1)} + \omega^2 v_0^{(1)} = A\cos\omega t\,(1 - \Lambda_0^{(1)}) + \frac{A\omega^2}{3}\cos 3\omega t \tag{32}$$

Pentru a se asigura că nici un termen secular apare în ec. (32), rezonanță trebuie evitate. Pentru a face acest lucru, coeficientul de pisică cos este necesar să fie zero. Adică

$$\Lambda_0^{(1)} = 1 \qquad (33)$$

Presupunând că condițiile inițiale $v_0^{(1)} = 0\ si\ \dot{v}_0^{(1)} = 0$ în (32), obținem

$$v_0^{(1)}(t) = \frac{A}{24}(\cos\omega t - \cos 3\omega t) \qquad (34)$$

De substituție (31), (33) şi (34) în (30) produce:

$$\ddot{v}_0^{(2)} + \omega^2 v_0^{(2)} = A\cos\omega t\left(-\Lambda_0^{(2)} - \frac{5\omega^2}{36}\right) + \frac{2A\omega^2}{9}\cos 3\omega t - \frac{11\omega^2 A}{36}\cos 5\omega t \quad (35)$$

Evitarea prezența unui termen seculare în ecuația (35), are nevoie de:

$$\Lambda_0^{(2)} = -\frac{5\omega^2}{36} \qquad (36)$$

In conditiile initiale $v_0^{(2)}(0) = 0\ si\ \dot{v}_0^{(2)}(0) = 0$ obtinem:

$$v_0^{(2)}(t) = \frac{A}{36}(\cos\omega t - \cos 3\omega t) + \frac{11A}{864}(\cos 5\omega t - \cos\omega t) \qquad (37)$$

Inlocuim (33) si (36) in ecuatia

$$1 = \omega^2 + \alpha\Lambda_0^{(1)} + \frac{\alpha}{2}\Lambda_0^{(2)} + 0\,(\alpha^3) \qquad (38)$$

Obtinem:

$$\omega^2 = \frac{1-\alpha}{1-\frac{5}{72}\alpha^2} \qquad (39)$$

Inlocuind (25) in (39) avem:

$$\omega^2 = \frac{96\varepsilon A^2 + 128}{67\varepsilon^2 A^4 + 192\varepsilon A^2 + 128} \quad (40)$$

Perioada de aproximatie obținute din (40) este

$$T_{approx} = 2\pi \left(\frac{67\varepsilon^2 A^4 + 192\varepsilon A^2 + 128}{96\varepsilon A^2 + 128} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (41)$$

Pentru a ilustra acuratețea remarcabilă a rezultatelor obținute, vom compara perioada de aproximativ (41), cu exact un :

$$T_{ex} = 4\sqrt{\varepsilon} \int_0^A \frac{dv}{\sqrt{\ln(1+\varepsilon A^2) - \ln(1+\varepsilon v^2)}} \quad (42)$$

In cazul $\varepsilon A^2 \to \infty$ avem:

$$\lim_{\varepsilon A^2 \to \infty} \frac{T_{ex}}{T_{approx}} = \frac{2\sqrt{2\pi\varepsilon A}}{2\pi\sqrt{\frac{67}{96}}\varepsilon A^2} \approx 0{,}955076 \quad (43)$$

Prin urmare, pentru orice valori de e, ea poate fi uşor demonstrat că eroarea maximă relativă este mai mică decât
4,5%.

4.Concluzii

În cele de mai sus s-a studiat o ecuație diferențială neliniare, cu şi fără un parametru mic cu o metoda homotopica modificata Rezultatele arată că aproximări obținute prin această metodă sunt valabile nu numai pentru parametrii de mici, dar, de asemenea, pentru parametrii foarte mari, plus două lor aproximări-comandă sunt de mare precizie.